

## MECANISMOS GENERADORES DE INESTABILIDAD QUÍMICA EN REACCIONES DE POLIMERIZACIÓN

Juan A. Pérez Ortiz e Issa Katime

Grupo de Nuevos Materiales y Espectroscopía Supramolecular. Departamento de Química Física. Facultad de Ciencia y Tecnología. Campus de Lejona. Universidad del País Vasco (UPV/EHU). Apartado 644. Bilbao. España. Correo electrónico: [issa.katime@ehu.es](mailto:issa.katime@ehu.es)

### RESUMEN

Se proponen dos nuevos mecanismos cinéticos (0-Re-1,2 y 0-Re-1), utilizando el método de Lyapounov, con el propósito de estudiar la inestabilidad del estado estacionario. Ambos mecanismos tienen en cuenta una etapa de reiniciación en el proceso de polimerización, aunque ambos son diferentes debido a que el modelo 0-Re-1,2 considera dos modos de etapas de terminación: una de orden zero y otra de segundo orden. Sin embargo, en el segundo mecanismo, el 0-Re-1, sólo se considera una de estas dos etapas de terminación (la de orden cero). En ambos mecanismos propuestos se estudian los casos difusivo y no-difusivo. Los resultados obtenidos muestran que se obtienen sistemas capaces de exhibir ordenaciones en el tiempo (oscilaciones de ciclo límite) y en el espacio (estructuración emergente a partir de fluctuaciones).

**Palabras claves:** mecanismo cinético, Poincaré-Bendixon, método Lyapounov, proceso de polimerización, reacciones oscilantes, estado estacionario.

### INTRODUCCIÓN

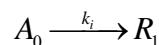
Los modelos matemáticos que la cinética formal asocia a los mecanismos de reacción química [1] se prestan bien, a causa de su frecuente no-linealidad, a modelar conductas dinámicas complejas como, por ejemplo, oscilaciones en las concentraciones [2]; y asimismo, al acoplarlos con procesos de difusión, sirven para dar cuenta de estructuras disipativas espaciales [3-6].

Este marco matemático ya se conocía [7,8] cuando llegaron los primeros descubrimientos experimentales [9-11] de los fenómenos citados, casos generalmente constituidos por sistemas redox complicados. Un campo en el que aún escasean las realizaciones experimentales de las mencionadas conductas, es el de las reacciones de polimerización; con todo ya se pueden proponer diversos esquemas mecanísticos teóricos,

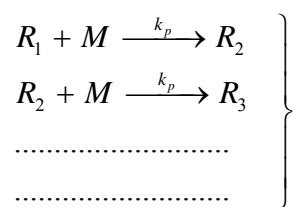
susceptibles de dar dicho comportamiento [12]. En este artículo se presentan dos nuevas alternativas de este género de modelos.

## I. MECANISMO 0-Re-1,2.

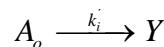
### 1. Esquema cinético



Iniciación de orden cero [1,13]. Dado que en esta variante la concentración de monómero se tomará como constante, por ejemplo, por hallarse en gran exceso, puede englobarse la intervención del monómero en la iniciación dentro del término constante  $k_i A_0$ ; a partir del precursor  $A_0$  se obtendrá los primeros radicales propagadores  $R_1$ :

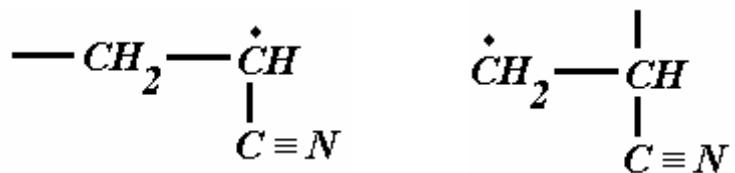


Procesos de propagación:

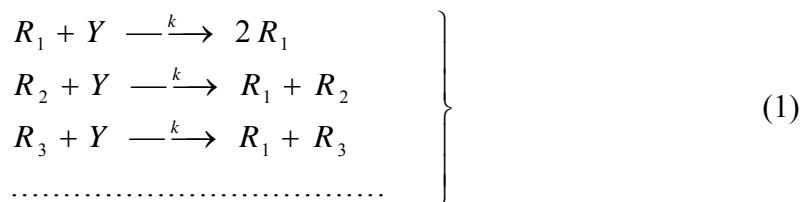


Es un proceso alternativo a la iniciación propiamente dicha, antes citada, a partir del precursor  $A_0$  se obtiene un radical  $Y$  isómero del primer propagador  $R_1$ .

A modo de ejemplo, en el caso del monómero acetonitrilo la pareja  $R_1/Y$  puede estar constituida por las formas

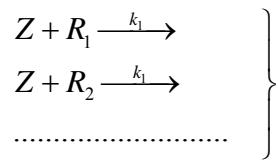


Posibles estructuras del radical acetonitrilo.

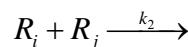


Hipotéticamente, aquí se introducen las etapas que podrían denominarse "reiniciación", ya que en ellas se produce de nuevo  $R_1$ , pero no se altera la longitud de cadena del radical propagador que choca con el isómero  $Y$ .

Para la terminación se admiten dos posibilidades en competencia:

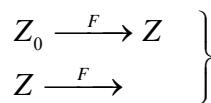


Una terminación de orden 1 respecto a los radicales, por cesión de reactividad ante un tercer cuerpo Z; o bien



otra terminación de orden 2 respecto a los propagadores.

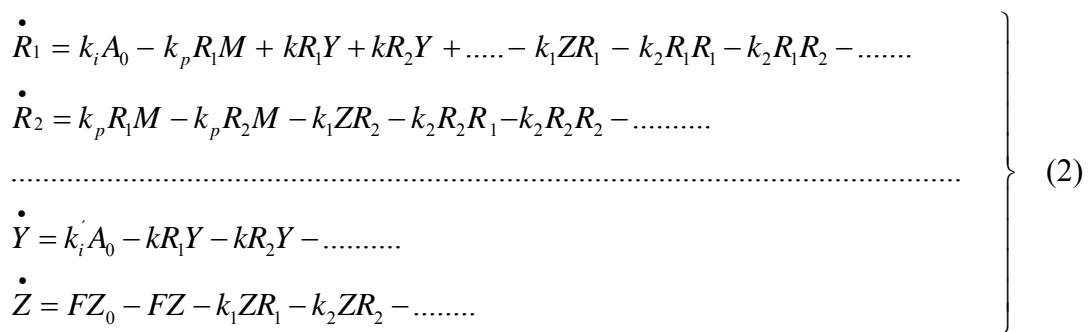
Además se precisan las etapas:



en la que Z regresa al sistema a partir del precursor  $Z_0$ , y Z sale del sistema en una etapa de primer orden.

A este conjunto de ecuaciones que representan el esquema cinético se les denominará (1). La denominación 0-Re-1,2 [12] alude al tipo de iniciación (orden cero), a la "reiniciación", y a las terminaciones competitadoras, de órdenes 1 ó 2 respecto a los radicales.

**2. Análisis en el caso no difusivo.** Las ecuaciones cinéticas del mecanismo anterior, son:



Sumando todas estas ecuaciones para  $\dot{R}_i$  y con la notación siguiente,

$$\Sigma R_i = X; k_i A_0 = A; k_i' A_0 = B; F Z_0 = C \quad (3)$$

se obtiene el sistema,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{X} = A + kXY - k_1ZX - k_2X^2 \\ \dot{Y} = B - kXY \\ \dot{Z} = C - FZ - k_1ZX \end{array} \right\} \quad (4)$$

Este sistema se puede reducir a dos variables suponiendo que Z alcance rápidamente un estado estacionario y se mantenga en él ( $\dot{Z} = 0$  siempre). De aquí se llega a:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{X} = A + kXY - \frac{k_1CX}{k_1X + F} - k_2X^2 \\ \dot{Y} = B - kXY \end{array} \right\} \quad (5)$$

Para facilitar el estudio de la estabilidad de los estados estacionarios, se designa un pequeño parámetro  $\mu$  [14-18] haciendo

$$y = Y/B; \quad A = a/\mu; \quad kB = b/\mu; \quad C = c/\mu; \quad k_2 = 1/\mu$$

con lo que resulta el sistema [12-17]:

$$\left. \begin{array}{l} \mu \dot{X} = a + bXy - \frac{k_1cX}{k_1X + F} - X^2 = S(X, y) \\ \dot{y} = 1 - kXy = N(X, y) \end{array} \right\} \quad (6)$$

La curva  $S = 0$  o nuliclina característica, puede tener, para ciertos valores de los parámetros, un máximo y un mínimo; asimismo, la curva  $N = 0$  (la otra nuliclina) puede cortarla en un punto único (que será un estado estacionario, SS) situado en la región entre el máximo y el mínimo (Figura 1).

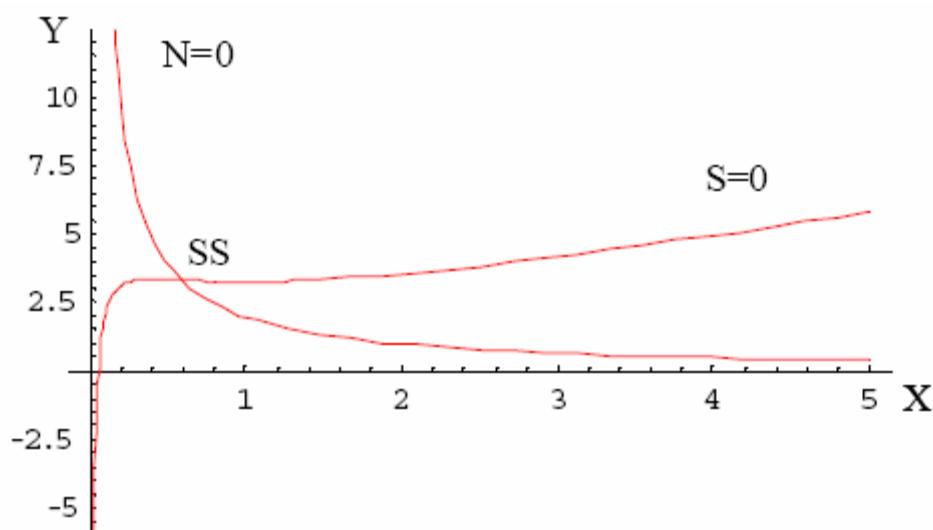


Figura 1. Plano de fases del sistema de ecuaciones (6).

Para estudiar la estabilidad de este estado estacionario se utiliza el primer método de Lyapunov [19-21]. Calculada la traza  $Tr_o$  y el determinante  $Det_o$  de la matriz del sistema variacional linealizada [22-24] asociada al sistema (6):

$$Tr_o = -\frac{X_o f'_o}{\mu} - kX_o \quad Det_o = \frac{kX_o}{\mu} (X_o f'_o + b y_o)$$

donde  $f(x) = [k_1 C/(k_1 X + F)] + X - (a/x)$ , dado que siempre  $[Fk_1 C/(k_1 X_o + F)]^2 > 0 > -2X_o$ , será siempre  $Det_o > 0$ ; en tal caso, si  $Tr_o > 0$  el sistema estacionario es inestable. Para  $\mu \rightarrow 0$  ello está asegurado si  $f'_o < 0$ , es decir, si el sistema estacionario se halla en efecto en la región intermedia entre el máximo y el mínimo de la característica.

Por otra parte, se puede construir un recinto de Poincaré-Bendixson (recinto PB) [12, 22, 25], de no retorno para las trayectorias de fase, encerrado por la siguiente frontera (Figura 2): se parte de  $\alpha$ , intersección de  $S = 0$  con el eje  $X$ , y se sigue la vertical  $\alpha\beta$  hasta  $N = 0$ . Desde  $\beta$ , en la horizontal  $\beta\gamma$  hasta volver a  $S = 0$ ; desde  $\gamma$  se baja la vertical  $\gamma\delta$  hasta el eje  $X$ . El tramo  $\delta\alpha$  de dicho eje cierra el recinto.

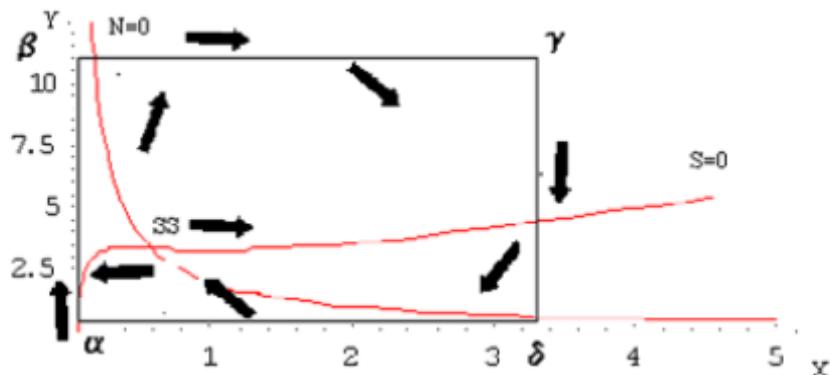


Figura 2. Recinto PB para el caso de la sustitución de los valores  $a = 0,25$ ;  $b = 1$ ;  $k_1 = 1$ ;  $C = 5$ ;  $F = 1$ ;  $k_p + k = 0,5175$  en el sistema de ecuaciones (6).

El vector campo de direcciones del sistema (6) es  $\vec{F} = (\dot{X}, \dot{Y}) = (S/\mu, N)$ . Evaluando su flujo a lo largo de  $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$  [26], se tiene que:

En  $[\alpha, \beta]$ ,  $\vec{n} = (-1, 0)$ ,  $S > 0$ , el flujo  $\vec{F} \cdot \vec{n} = -S/\mu < 0$

En  $[\beta, \gamma]$ ,  $\vec{n} = (0, 1)$ ,  $N < 0$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{n} = N < 0$

En  $[\gamma, \delta]$ ,  $\vec{n} = (1, 0)$ ,  $S < 0$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{n} = S/\mu < 0$

$$\text{En } ]\delta, \alpha], \vec{n} = (0, -1), N > 0, \vec{F} \cdot \vec{n} = -N < 0$$

Por lo tanto, las trayectorias no pueden salir del recinto delimitado por  $\alpha\beta\gamma\delta\alpha$ . Si el sistema estacionario es inestable, dicho recinto contiene al menos un ciclo límite, y el sistema ejecutará oscilaciones sostenidas de las concentraciones X e Y.

Para  $\mu \rightarrow 0$ , se dan oscilaciones de relajación [12, 26-27], y el ciclo límite se aproxima al que muestra la Figura 3 [17].

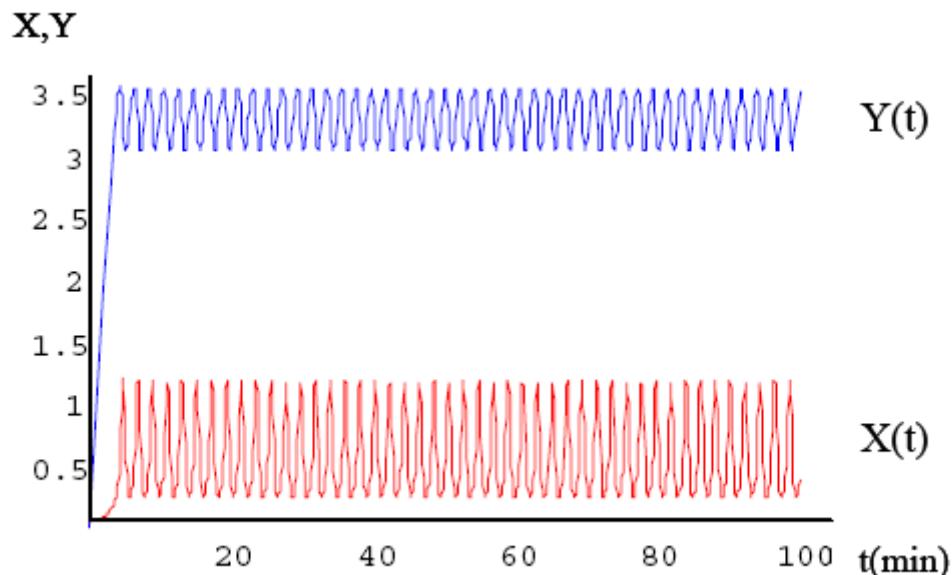


Figura 3. Ciclo límite de relajación.

Como ejemplo numérico lo anteriormente expuesto se cumple cuando los parámetros valen (en las unidades adecuadas):  $a = 0,25$ ,  $b = 1$ ,  $k_1 = 1$ ,  $c = 5$ ,  $F = 1$  y  $k = 0, 5175$ . Teniendo en cuenta estos valores, el sistema anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \mu \dot{X} &= 0,25 + Xy - \frac{5X}{X+1} - X^2 = S(x, y) \\ \dot{y} &= 1 - 0,5175Xy = N(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

que posee un estado estacionario único en el punto de inflexión de  $S = 0$ :  $x_0 = 0,5733$ ,  $y_0 = 3,3127$ . La curva  $S = 0$  tiene un máximo en  $X = 0,4025$ ,  $y = 3,3464$  y un mínimo en  $x = 1$ ,  $y = 3,25$ .

Además. se tiene

$$\left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) = -2x_0 + y_0 - \frac{5}{(x_0 + 1)^2} = 0,1516 > 0$$

lo cual asegura que para  $\mu \rightarrow 0$  sea  $\text{Tr}_0 > 0$ , es decir, el citado ciclo estacionario es inestable.

**3. Incluyendo la difusión.** Las ecuaciones (5) se plantearon sin tener en cuenta la difusión de los radicales X, ni la del isómero Y (ésta es más probable que aquella [13], debido a la menor masa molecular de Y). Si se desea tener en cuenta la difusión, dichas ecuaciones se deben modificar de la forma [28-32]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= A + kXY - \frac{k_1 CX}{k_1 X + F} - k_2 X^2 + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= B - kXY + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

donde sólo se ha supuesto relevante una dimensión (r).  $D_x$  y  $D_y$  son los respectivos coeficientes de difusión. Las ecuaciones (8) pueden pasarse a una forma que contiene un pequeño parámetro [17, 21] por medio de las notaciones

$$y = Y/B; \quad A = a/\mu; \quad KB = b/\mu; \quad C = c/\mu; \quad k_2 = 1/\mu; \quad D_x = \delta_x/\mu$$

obteniéndose el sistema (9):

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial X}{\partial t} &= a + bXy - \frac{k_1 cX}{k_1 X + F} - X^2 + \delta_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 1 - kXy + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

El sistema estacionario que se obtenía en el caso no difusivo, se denomina ahora "estado estacionario homogéneo" (SSH). La inestabilidad del sistema estacionario homogéneo se estudia también por el método de linealización de Lyapunov [22, 33-36], suplementado con condiciones de contorno (en este caso las de Neumann [20], flujo cero en los límites del sistema). Su traza es entonces

$$Tr_n = Tr_0 - (D_x + D_y)n^2$$

siendo  $n = m\pi/L$  el número de ondas, donde L es la longitud del sistema y  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Es obvio que si el sistema estacionario homogéneo es estable a causa de  $Tr_0 < 0$ , la difusión no podrá desestabilizarlo (ya que entonces  $Tr_n < 0$  también).

$$Det_n = Det_0 - n^2 \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial S}{\partial X} \right)_0 D_y + \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right)_0 D_x \right] + D_x D_y n^4 \quad (10)$$

y podrá ser  $Det_n < 0$  [5] (con desestabilización del sistema estacionario homogéneo) para algún valor de n, si  $(\partial N / \partial y)_0 > 0$ , ó si  $(\partial S / \partial x)_0 > 0$ , aunque sea  $Det_0 > 0$ .

A modo de ejemplo numérico, sean (en unidades arbitrarias):

$$a = 0,25, b = 1, k_l = 1, F = 1, k = 0, 5175, c = 5, \mu = 1 (D_x = \delta_x)$$

El sistema de ecuaciones (9) quedará de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= 0,25 + Xy - \frac{X}{X+1} - X^2 + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 1 - 0,5175 Xy + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

cuyo estado estacionario no difusivo es el mismo que se obtenía en el párrafo anterior:  $x_0 = 0,5833$ ,  $y_0 = 3,3127$ . Después de la linealización, se encuentra  $Tr_0 = -0,1503$  (el sistema no difusivo ya no sería oscilatorio en estas condiciones [37]: el estado estacionario es estable y ya no puede completarse la prueba de Poincaré-Bendixson sobre la existencia de un ciclo límite). Además,  $Det_0 = 0,95423$ , con lo cual

$$Det_n = 0,95423 + (0,3019 D_x - 0,1516 D_y) n^2 + D_x D_y n^4 \quad (12)$$

Si  $D_y$  es lo bastante grande, podrá hacerse  $Det_n < 0$ , y el sistema estacionario homogéneo se puede desestabilizar, para algún valor de  $n$ ; así, una fluctuación inicial cuyo desarrollo de Fourier [4, 20, 22-23] contenga alguna componente con dicho número de ondas, sacará al sistema del estado estacionario homogéneo, y se establecerá un ordenamiento espacial nuevo: una estructura disipativa, un “orden producido por fluctuaciones”.

Si se denota  $p = n^2$ , la expresión (12) toma la forma de una ecuación de segundo grado:

$$Det_n = 0,9542 + (0,3019 D_x - 0,1516 D_y) p + D_x D_y p^2 \quad (13)$$

y es obvio que se podrá cumplir  $Det_n < 0$  en un cierto intervalo  $p_1 < p < p_2$ , si el discriminante  $\Delta_{(13)}$  es positivo:

$$\Delta_{(13)} = (0,3019 D_x - 0,1516 D_y)^2 - 3,8168 D_x D_y > 0 \quad (14)$$

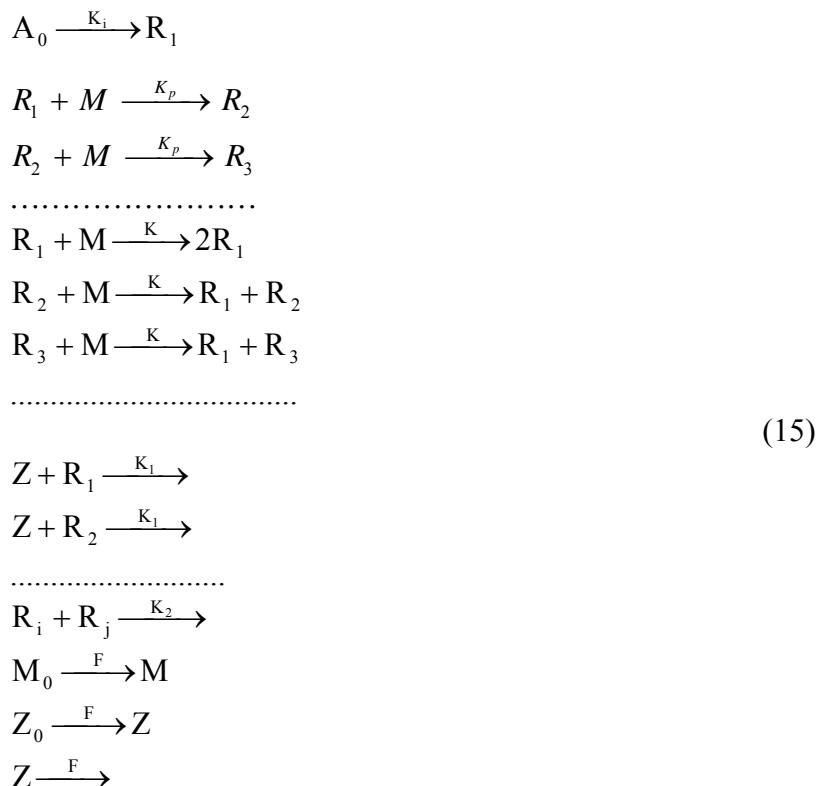
Esta condición requiere que al menos uno de los dos coeficientes de difusión sea no nulo ( $D_x \neq 0$  ó  $D_y \neq 0$ ). Más aún, como  $p_1$  y  $p_2$  han de ser positivas (valores de  $n^2$ ), cosa posible ya que el producto de las raíces  $p_1 p_2 = 0,9542 / (D_x D_y) > 0$ , la suma de las raíces será también positiva:  $p_1 + p_2 = (0,1526 D_y - 0,3019 D_x) / (D_x D_y) > 0$ , lo cual exige que  $D_y >$

(0,3019/0,1526) D<sub>x</sub>. Esta condición parece posible de cumplir, ya que el radical Y, isómero de R<sub>1</sub>, menos masivo que los radicales X, se difundirá más rápidamente.

## II. MECANISMO 0-Re-1.

Un estudio posterior reveló que las terminaciones de orden 2 no son imprescindibles para lograr una conducta oscilatoria ó estructuras ordenadas surgidas de fluctuaciones espaciales. Se elaboró este segundo esquema mecanístico [22-23, 38-40]:

1. Esquema cinético y análisis en el caso no difusivo. Se han mantenido las etapas de "reiniciación" del esquema (1). El resto de la interpretación es idéntica a la efectuada en la sección I.1.



Las ecuaciones cinéticas son:

$$\left. \begin{array}{l}
 \dot{R}_1 = k_i A_0 - k_p R_1 M + k R_1 M + k R_2 M + \dots - k_1 Z R_1 \\
 \dot{R}_2 = k_p R_1 M - k_p R_2 M - k_1 Z R_2 \\
 \dots \\
 \dot{M} = F M_0 - k_p R_1 M - k_p R_2 M - \dots - k R_1 M - k R_2 M - \dots \\
 \dot{Z} = F Z_0 - F Z - k_1 Z R_1 - k_1 Z R_2 - \dots
 \end{array} \right\} \tag{16}$$

Tras sumar las ecuaciones para las  $\dot{R}_i$ , y con las mismas notaciones (3), se llega a

$$\left. \begin{array}{l} \dot{X} = A + kXY - k_1ZX \\ \dot{Y} = B - (k_p + k)XY \\ \dot{Z} = C - FZ - k_1ZX \end{array} \right\} \quad (17)$$

Eliminando  $Z$  mediante la hipótesis  $\dot{Z} = 0$ , resulta

$$\left. \begin{array}{l} \dot{X} = A + kXY - \frac{K_1CX}{k_1X + F} \\ \dot{Y} = B - (k_p + k)XY \end{array} \right\} \quad (18)$$

Para elegir el parámetro pequeño, se hace  $y = Y/B$ ,  $A = a/\mu$ ,  $kB = b/\mu$ ,  $C = c/\mu$ , y se obtendrá

$$\begin{aligned} \mu \dot{X} &= a + bXy - \frac{k_1cX}{k_1X + F} = S(X, y) \\ \dot{y} &= 1 - kXy = N(X, y) \end{aligned} \quad (19)$$

Ahora  $S = 0$  sólo posee, en todo caso, un máximo en

$$X = X_{\max} = \frac{F}{k_1 \left( \sqrt{\frac{c}{a}} - 1 \right)}$$

si  $c > a$ . La intersección de  $S = 0$  con  $N = 0$  (el estado estacionario, SS) ocurre a la derecha del máximo si  $X_0 > X_{\max}$ , es decir,  $(b/k) > \sqrt{ac} - a$  (Figura 4).

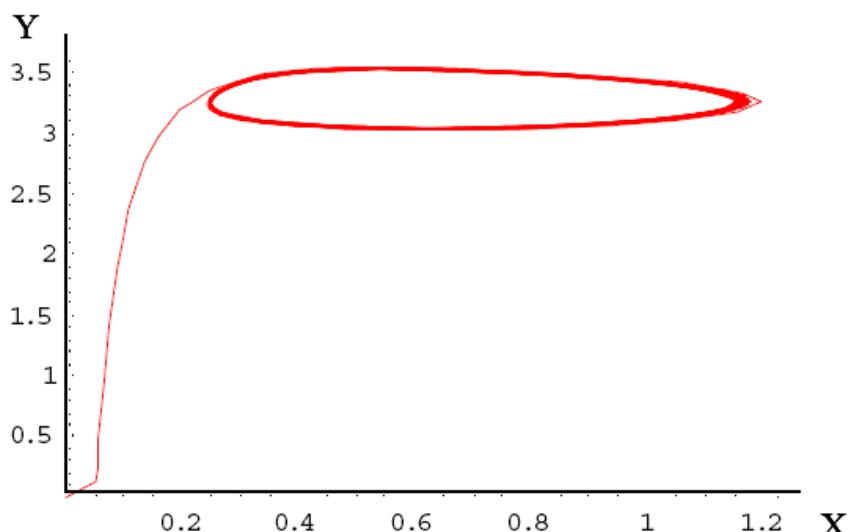


Figura 4. Plano de fases del sistema de ecuaciones (19).

Para estudiar la estabilidad de este ciclo estacionario se utilizó el primer método de Lyapurov [19-20].

Calculada la traza  $Tr_o$  y el determinante  $Det_o$  de la matriz del sistema variacional linealizado [22-24] asociado al sistema (19),

$$Tr_o = -\frac{x_0 f'_o}{\mu} - u X_o \quad Det_o = \frac{k X_o}{\mu} [X_o f'_o + b y_o]$$

donde  $f(x) = (k_1 c / (k_1 X + F)) - (a / X)$ . Como  $Det_o = (k X_o / \mu) [F k_1 c / (k_1 X_o + F)^2] > 0$  siempre, para  $\mu \rightarrow 0$  se tendrá  $Tr_o > 0$  si  $f'_o < 0$ , es decir, si  $X_o > X_{\max}$ . En tales condiciones el sistema estacionario es inestable.

Es algo más complejo construir aquí la frontera del recinto PB de no retorno [12,25,41] para las trayectorias de fase. Se parte de  $\alpha$  (Figura 5), corte de  $S = 0$  con el eje de las  $X$ , y se va en vertical  $\alpha\beta$  hasta  $N = 0$ , luego en horizontal  $\beta\gamma$  hasta la recta  $X = X_0$  que es la isoclina correspondiente a la pendiente  $(dy / dX) = (\dot{y} / \dot{x}) = -(\mu k / b)$  de las trayectorias de fase.

Desde  $\gamma$  se traza el segmento  $\gamma\delta$ , de pendiente  $-\mu k / b$ , hasta cortar en  $\delta$  a  $S = 0$ . Se desciende en vertical  $\delta\epsilon$  hasta el eje  $X$ , y por último el tramo  $\epsilon\alpha$  de dicho eje cierra el recinto.

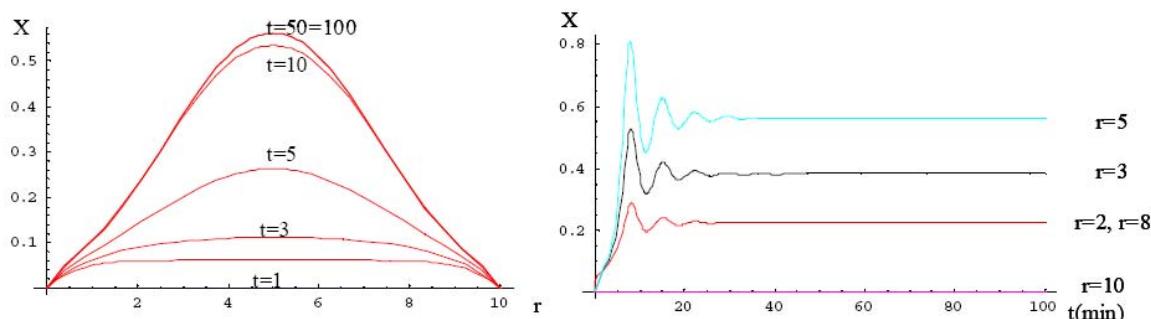


Figura 5. Recinto PB del sistema (19).

El flujo de  $\vec{F} = (S / \mu, N)$  a lo largo de  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\alpha$  vale:

$$\text{En } [\alpha, \beta], \vec{n} = (-1, 0), S > 0, \text{ el flujo } \vec{F} \cdot \vec{n} = -\frac{S}{\mu} < 0$$

$$\text{En } [\beta, \gamma], \vec{n} = (0, 1), N < 0, \vec{F} \cdot \vec{n} = N < 0$$

En  $]\gamma, \delta]$ ,  $\vec{n} = \left( \frac{\mu k}{b}, 1 \right)$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{\mu k}{b} \left( \frac{S}{\mu} \right) + 1$   $N = \frac{kk_1c}{b} \left[ \frac{X_c}{k_1X_c + F} - \frac{X}{k_1X + F} \right]$ , ya que

$\frac{k_1cX_0}{k_1X_0 + F} = a + \frac{b}{k}$ ; y dado que en este segmento es  $X > X_0$ , resulta  $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$ .

En  $]\delta, \varepsilon]$ ,  $\vec{n} = (1, 0)$ ,  $S < 0$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{S}{\mu} < 0$

En  $]\varepsilon, \alpha]$ ,  $\vec{n} = (0, -1)$ ,  $N > 0$ ,  $\vec{F} \cdot \vec{n} = -N < 0$

Por lo tanto, las trayectorias no pueden salir del recinto encerrado por  $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\alpha$ . Si el sistema estacionario es inestable ( $X_0 > X_{\max}$ ) dicho recinto contiene al menos un ciclo límite [26], y el sistema presenta oscilaciones sostenidas de las concentraciones X e Y. La Figura 6 presenta la posible forma del ciclo límite [23].

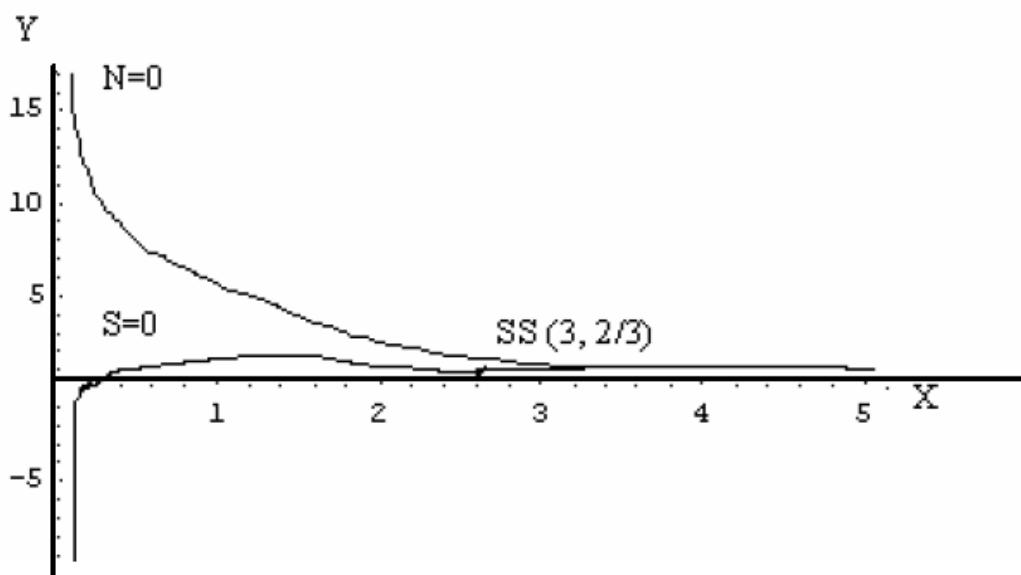


Figura 6. Ciclo límite del sistema (19).

Un conjunto concreto de valores numéricos de los parámetros, para los que se da este comportamiento sería (en unidades adecuadas):

$\mu = 0,1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 4$ ,  $k_1 = 1$ ,  $F = 1$ ,  $k = 0,5$ , con lo cual  $X_0 = 3$ ,  $y_0 = 2/3$ ,  $X_{\max} = 1$ ,  $(\partial S / \partial X)_0 = 5/12 > 0$ .

**2. Incluyendo la difusión.** De modo análogo al estudio realizado en la sección I.3., si se tiene en cuenta la difusión[30-32] de X y de Y (ésta más probable que aquella) las ecuaciones (18) se expresan

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t} = A + kXY - \frac{k_1 CX}{k_1 X + F} + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = B - (k_p + k)XY + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} \end{array} \right\} \quad (20)$$

Con los cambios de notación,  $y = Y/B$ ,  $A = a/\mu$ ,  $kB = b/\mu$ ,  $C = c/\mu$ ,  $D_x = \delta_x/\mu$ , pasan a la forma

$$\left. \begin{array}{l} \mu \frac{\partial X}{\partial t} = a + bXy - \frac{k_1 cX}{k_1 X + F} + \delta_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 1 - (k_p + k)Xy + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{array} \right\} \quad (21)$$

Pueden hacerse ahora consideraciones similares a las efectuadas en I.3 respecto de las ecuaciones (9) y (10), con idénticas conclusiones acerca de la desestabilización de un sistema estacionario estable homogéneo. Para el ejemplo numérico concreto (en unidades adecuadas)  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 4$ ,  $k_1 = 1$ ,  $F = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $K = 0,5$ , se tiene el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial t} = 1 + Xy - \frac{4X}{X+1} + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = 1 - 0,5Xy + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{array} \right\} \quad (22)$$

El sistema estacionario homogéneo es el mismo,  $X_0 = 3$ ,  $y_0 = 2/3$ , que se daba en el caso no difusivo; linealizando la ecuación (22) en torno de él, se halla que  $T_{t_0} = (5/12) - (3/2) = -(13/12) < 0$  (en estas condiciones el sistema no difusivo no oscila); y  $\text{Det}_0 = 3/8 > 0$ , pero puede hacerse  $\text{Det}_n < 0$ , ya que

$$\text{Det}_n = \frac{3}{8} + n^2 \left( \frac{3}{2} D_x - \frac{5}{12} D_y \right) + D_x D_y n^4 \quad (23)$$

si  $D_y$  es suficientemente grande. Expresando de nuevo  $p = n^2$ , la ecuación (23) toma la forma

$$\text{Det}_n = \frac{3}{8} + \left( \frac{3}{2} D_x - \frac{5}{12} D_y \right) p + D_x D_y p^2 \quad (24)$$

y puede ser  $\text{Det}_n < 0$  en el intervalo  $p_1 < p < p_2$  si el discriminante

$$\Delta_{(24)} = \left( \frac{3}{2} D_x - \frac{5}{12} D_y \right)^2 - \frac{3}{2} D_x D_y > 0 \quad (25)$$

La suma de las raíces de  $\text{Det}_n = 0$  es

$$p_1 + p_2 = \frac{\frac{5}{12}D_y - \frac{3}{2}D_x}{D_x D_y} > 0$$

si se cumple que  $D_y > (18/5)D_x$ ; esto es posible ya que Y es menos masivo y difundirá más rápidamente.

### RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este artículo se proponen dos mecanismos de polimerización capaces de exhibir ordenaciones en el tiempo (oscilaciones de ciclo límite) y en el espacio (estructuración emergente a partir de fluctuaciones) [42-45]. Los esquemas cinéticos son algo distintos de otros intentos previos en este sentido [12]. La inclusión del efecto de la "reiniciación" provee en ambos casos un flujo de realimentación positiva [46] (análogo a una autocatálisis)[39], y la no-linealidad [14-15] precisa para obtener los deseados comportamientos se alcanza gracias a la terminación por transferencia a un tercer cuerpo que fluye a través del sistema. El acoplamiento de las dos variables, con realimentación negativa [46-47], viene dado por la propia propagación de la polimerización. El mecanismo I incorpora una no-linealidad suplementaria, no imprescindible, en la terminación de orden 2.

Los efectos oscilatorios que se observarían en ausencia de difusión tenderían a originar distribuciones de masas moleculares que también oscilarían (según el grado de avance al que se detenga la polimerización [48]) dentro de un cierto rango. La distribución espacial del sistema con difusión es posible, dadas las características de los coeficientes de difusión del radical isómero Y y de los radicales propagadores, y si se admite que se cumplen balances locales de materia [49] (en las regiones donde X sea grande, será el número de cadenas poliméricas terminadas, ya que éstas últimas se forman a partir de la desaparición de los radicales propagadores que se recombinan), se produciría una distribución espacialmente periódica de las cadenas, lo cual podría ser de interés en la morfogénesis de sistemas biológicos [50].

### BIBLIOGRAFÍA

1. Laidler, K.J. "Cinética de reacciones", Editorial Alhambra, Madrid, 1971
2. Noyes, R.M., *J. Chem. Educ.*, 66(3), 190 (1989)
3. Nicolis, G., Prigogine, I. "Self-organization in non-equilibrium systems", Wiley, New York, 1977
4. Nicolis, G., Prigogine, I. *Far. Symp. Chem. Soc.*, 9, 7 (1974)
5. Tyson, J.J., Light, J.C., *J. Chem. Phys.*, 59(8), 4164 (1973)

6. Gmitro, J.I., Scriven, L.E. "Intercellular transport", K. B. Warren ed., Academic Press, New York, 1966.
7. Poincaré, H. *Acta Math.*, **7**, 259 (1885)
8. Levinson, N., Smith, O. *Duke Math. J.*, **9**, 382 (1942)
9. Belousov, B.P., *Sb. Ref. Radiat. Med.* (1958), Medgiz, Moscú, 1959
10. Briggs, T.S., Rauscher, W. C. *J. Chem. Educ.*, **5**, 496 (1973)
11. Winfree, A.T. "Science", **175**, 634 (1975)
12. Pérez Ortiz, J.A. *Tesis Doctoral*, Universidad del País Vasco, 1991.
13. Moore, W.J. "Química Física", Editorial Urmo, Bilbao, 1977.
14. Andronow, A.A., Witt, A.A., Chaikin, S.E. "Theory of oscillators", Pergamon Press, Oxford, 1966
15. Minorskiy, N. "Non linear oscillations", Van Nostmad, Princeton 1962
16. Pontryagin, L.S. "Ecuaciones diferenciales ordinarias", Editorial Aguilar, Madrid, 1973
17. Gray, B. F., Aarons, L. J. *Far. Symp. Chem. Soc.*, **9**, 129 (1974)
18. Goodwin, B.C. "Temporal organization in cells", Academic Press, Londres, 1963
19. Lyapunov, A.M., *Comm. Soc. Math.*, Khavkov, 1892
20. Piskunov, N. "Cálculo diferencial e integral", Editorial Montaner y Simón, Barcelona, 1970
21. Balslev, I., Degn, H., *Far. Symp. Chem. Soc.*, **9**, 233 (1974)
22. Montero, F., Mokán, F. "Biofísica", Edema, Madrid, 1992
23. Volkenstein, B. "Biofísica", Editorial MIR, Moscú, 1985
24. Jou, D., Llebot, J.E. "Introducción a la termodinámica de procesos biológicos", Editorial Labor, Madrid, 1989
25. Tyson, J.J., *J. Chem. Phys.*, **58**, 3919 (1973)
26. La Salle, J. *Quart. Applied Math.*, **7(1)**, 1 (1949)
27. Lavenda, B., Nicolis, O., Herschkowitz-Kauffmann, M., *J. Theor. Biol.*, **32**, 283, 1971
28. Glandsdorff, P.G., Prigogine, I. "Thermodinamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations", Wiley-Interscience, New York, 1971
29. Turing, A.M., *Phil. Trans. R. Soc.*, London, **B237**, 37 (1952)
30. Lefever, R., *J. Chem. Phys.*, **48**, 1695 (1962)
31. Nicolis, G., Portnow, J., *Chem. Rev.*, **73(4)**, 365 (1973)
32. De Groot, S.R., Mazur, P. "Non equilibrium thermodynamics", North Holland, Amsterdam, 1967

33. Thom, R. "Mathematical models of morphogenesis", Chichester, Ellis Horwood, 1983.
34. Flicker, M., Ross, J., *J. Chem. Phys.*, **60**(9), 3498 (1974)
35. Prager, S., *J. Chem. Phys.*, **25**(2), 279 (1956)
36. Wagner, C., *J. Colloid Sci.*, **5**, 85 (1950)
37. Winfree, A.T., *Sci. Amer.*, **230**, 82 (1974)
38. Selkov, E.E., *Eur. J. Biochem.*, **4**, 79 (1968)
39. Tyson, J. J., *J. Chem. Phys.*, **62**(3), 1020 (1975)
40. Goldbeter, A., Lefever, R. *Biophys. J.*, **12**, 1302 (1972)
41. Imaz, C., Vokel, Z. "Ecuaciones diferenciales ordinarias", Limusa-Wiley, México, 1968
42. Sancho, J. M., *Investigación y Ciencia*, pág. 16, Febrero 1988.
43. Horsthenke, W., Lefever, R. "Noise induced transitions", Springer Verlag, Berlín, 1983.
44. Moss, F.F., McClintock P.V. "Noise in non linear dynamical systems", Cambridge University Press.
45. Van Kamven, F.G. "Stochastic proceses in physics and chemistry", North Holland Amsterdam, 1981
46. Franck, U.F., *Far. Symp. Chem. Soc.*, **9**, 137 (1974)
47. Bonhoeffer, H., *Z. Elektrochem.*, **51**, 24 (1948)
48. Peebles, L. H. "Molecular weight distributions in polymers", Wiley-Interscience, New York, 1971
49. Dostal, H., Raff K., *Z. Physik. Chem.*, **32B**, 117 (1936)
50. Thom, R. "Stabilité structurelle et morphogénese", Dunod, París, 1973